1. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 Verifique si la función indicada es una solución particular de la ecu-diferencial dada:

(a) $y' = xy^{1/2}$; $y = \frac{x^4}{16}$ (b) $y'' + 16y = 0$; $y = \cos 4x$
(c) $(y - x)y' = y - x + 8$; $y = x + 4\sqrt{x+2}$ (d) $y' = (x + y)^2$; $y = \tan(x + 1) - x$

1.2 Encuentre valores de m apropiados para que la función indicada sea una solución particular de la ecu-diferencial dada:

(a) $y' + 2y = 0$; $y = e^{mx}$ (b) $xy'' + 2y' = 0$; $y = x^m$

1.3 Verifique si la expresión indicada es una solución implícita de la ecu-diferencial dada:

(a) $2xydx + (x^2 - y)dy = 0$; $-2x^2y + y^2 = 1$ (b) $yy' + x = 0$; $x^2 + y^2 = 1$
(c) $(2y + x)y' = y - 2x$; $\ln(x^2 + y^2) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 1$

1.4 Resuelva las siguientes ecu-diferenciales de variables separables:

(a) $y' = 2xy^2$ (b) $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$
(c) $xyy'(1 + x^2) - y^2 - 1 = 0$ (d) $y' - 2y\tan x = 0$

1.5 Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas:

(a) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ (b) $x(x - y)y' + y^2 = 0$ (c) $y' - 1 = \frac{yx-y^2}{x^2}$

1.6 Resuelva la siguiente ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$: $y' = \frac{1}{(4x+y)^2}$

1.7 Resuelva las siguientes ecu-diferenciales lineales:

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ (b) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x + 1)^3$
(c) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $y' + (\cos x)y = \operatorname{sen} x \cos x$

1.8 Transforme las siguientes ecuaciones de Bernoulli en ecu-diferenciales lineales:

(a) $xy' + y = y^2 + \ln x,\ x > 0$ (b) $y' + xy = x^3y^3$
(c) $y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}$ (d) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{2y}$

1.9 Resuelva las siguientes ecuaciones de Riccati usando la solución particular dada:

(a) $(1 + x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$; $y_1 = -x$ (b) $y' + 2xy - y^2 = x^2$; $y_1 = x + 1$
(c) $y' - y + \frac{2}{x^3}y^2 = x^2$; $y_1 = -x^2$

1.10 Compruebe que las siguientes ecu-diferenciales son exactas e intégrelas:

(a) $(y - 3x^2)dx + (x - 1)dy = 0$ (b) $(2xy - \frac{1}{\cos^2 x}dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
(c) $e^{xy}y^2dx + e^{xy}(xy + 1)dy = 0$ (d) $\left(x - \frac{y}{y^2+x^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

1.11 Resuelva las siguientes ecuaciones sabiendo que admiten un factor integrante que depende solo de una de las variables:

(a) $y(xy+1)dx - xdy = 0.$ (b) $(x+y^2)dx - 2xydy = 0.$

(c) $ydx + \left(\frac{y^2}{4} - 2x\right) dy = 0.$ (d) $(x+2)e^x \cos y dx - (x+5)e^x \operatorname{sen} y dy = 0.$

1.12 La siguiente ecuación admite el factor integrante $\mu(x,y) = 3xy^2$

$$\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{xy}\right) dx + f(y)dy = 0.$$

Determine $f(y)$ y resuelva la ecuación resultante.

Existencia y unicidad de solución

1.13 Sea $xy' - 2y = x^3$.

(a) Aplique el Teorema de existencia y unicidad para demostrar que hay una única solución que pasa por el punto $(1,0)$.

(b) Encuentre dos soluciones distintas que pasen por el $(0,0)$. ¿Se verifican las hipótesis del Teorema de existencia y unicidad en dicho punto?

1.14 Resuelva el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ y encuentre el intervalo de definición de la solución. ¿Qué ocurre cuando x tiende a los límites de dicho intervalo?

1.15 Sea $y' - \frac{1}{x}y = x^2$. Estudie existencia y unicidad de soluciones y precise las soluciones que cumplen $y(1) = 0$. Encuentre dos curvas integrales que pasen por el origen. ¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad?

1.16 Sea $2xydy + (x^2 + y^2)dx = 0$. Estudie existencia y unicidad de soluciones por cada punto del plano. Resuelva la ecuación por dos métodos distintos. Halle la expresión explícita de todas las soluciones (si existen) que cumplam (i) $y(1) = \frac{1}{3}$; (ii) $y(1) = 0$.

1.17 Sea $2x(y-x)dy - y^2dx = 0$. Estudie existencia y unicidad de soluciones por cada punto del plano. Resuelva la ecuación por dos métodos distintos, considerando en un caso la x como función de y. Halle la expresión explícita de todas las soluciones (si existen) que cumplam (i) $y(1) = 3$; (ii) $y(0) = 0$.

1.18 Estudie existencia y unicidad de soluciones de los siguientes problemas de valores iniciales, y encuentre todas las soluciones:

(a) $\begin{cases} (x^2-1)y' + xy(1-y) = 0 \\ y(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x+1} = \operatorname{sen} x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

1.19 Resuelva la siguiente ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$$

y estudie la existencia y unicidad de solución con la condición inicial $y(0) = 4$ y, si existe, dibuje la curva integral.